

மாகாணக் கல்வித் தினைக்களம் வடமாகாணம்

இணைந்த கணிதம் I

10 T I

தரம்:13(2020)

பயிற்சிப் பரீட்சை - 01

முன்று மணி 10 நிமிடங்கள்

சுட்டெண்

அறிவுறுத்தல்கள்:

- பகுதி A இன் எல்லா வினாக்களுக்கும் விடை எழுதுக. ஒவ்வொரு வினாவுக்கும் விடைகளைத் தரப்பட்ட இடத்தில் எழுதுக. மேலதிக இடம் தேவைப்படுமெனின், நீர் மேலதிகத் தாள்களைப் பயன்படுத்தலாம்.
- பகுதி B இல் உள்ள 7 வினாக்களில் விரும்பிய 5 வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக.
- ஒதுக்கப்பட்ட நேரம் முடிவடைந்ததும் பகுதி A ஆனது பகுதி B யிற்கு மேலே இருக்கக்கூடியதாக இரு பகுதிகளையும் இணைத்துப் பரீட்சை மண்டப மேற்பார்வையாளரிடம் கையளிக்க.

(10) இணைந்த கணிதம் I

பகுதி	வினா எண்	கிடைத்த புள்ளிகள்
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	மொத்தம்	

இணைந்தகணிதம் I

இணைந்தகணிதம் II

இறுதிப் புள்ளிகள்

ପକ୍ଷତି A

1. n இன் நேர் நிறைவெண் பெறுமானங்களுக்கு $\sum_{r=1}^n r \cdot 2^{r-1} = 1 + (n - 1)2^n$ என கணித்த தொகுத்தறிவு முறையைப் பயன்படுத்தி நிறுவுக.

2. $y = 2|x + 1| - 3$, $y = x + 2|x - 1|$ ஆகியவற்றின் வரைபுகளை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக. இதிலிருந்து, $x + 3 + 2|x - 1| > 2|x + 1|$ ஜத் திருப்தி செய்யும் x இன் மெய்ப்பெறுமாணங்களின் தொடையைக் காண்க.

3. $Z_1 = 3 + 4i$, $|Z_2| = 5$ ஆகுமாறுள்ள சிக்கலெண்கள் Z_1, Z_2 வை ஒரே ஆகண் வரிப்படத்தில் குறிக்க. மேலும் $Z_1 + Z_2 = Z$ ஆகுமாறு உள்ள சிக்கல் எண் Z இன் ஒழுக்கின் சமன்பாட்டைக் காண்க. மேலும் $|Z|$ இன் அதியுயர் பெறுமானத்தையும் காண்க.

4. $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $(1+x)^{n+5}$ இன் ஈருறுப்பு விரிவில் அடுத்துவரும் மூன்று உறுப்புகளின் குணகங்களுக்கிடையிலான விகிதம் $5 : 10 : 14$ எனின் n இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

5. $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\cos 2x)(1-\cos 4x)(1-\cos 6x) \dots \dots \dots (1-\cos 2nx)}{x^{2n}}$ இன் பெறுமானத்தைக் கணிக்க.

6. $y = x^2$, $y = 2 - x^2$ ஆகிய இரு வரைபுகளையும் ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக. இரு வளையிகளாலும் உள்ளடைக்கப்பட்ட பிரதேசம் R இன் பரப்பளவு $\frac{8}{3}$ சதுர அலகுகள் எனவும் R ஜி x அச்சைப்பற்றி 2π ஆரையன்களினுடாகச் சுழற்றுவதனால் உண்டாகும் திண்மத்தின் கனவளவு $\frac{16\pi}{3}$ எனவும் காட்டுக.

7. $x = \frac{3at}{1+t^2}$, $y = \frac{3at^2}{1+t^2}$ என்னும் பரமானச் சமன்பாடுகளினால் தரப்படும் வளையி மீது
 $(9, 27)$ என்னும் புள்ளியில் வரையப்படும் தொடலியின் சமன்பாடு
 $3x + 4y - 135 = 0$ எனக் காட்டுக.

8. $A \equiv (7,0)$, $B \equiv (0,-5)$ என்னும் புள்ளிகளினாடு செல்லும் நேர்கோட்டிற்குச் செங்குத்தான் ஒரு நேர்கோடு x அச்சை P யிலும் y அச்சை Q விலும் வெட்டுகின்றது. புள்ளிகள் B , P இனாடு செல்லும் நேர்கோடு AQ ஜி R இல் வெட்டுகின்றது. புள்ளி R இன் ஓழுக்கைக் காண்க.

9. $S_1 \equiv x^2 + y^2 + 6x + 4y + 4 = 0$, $S_2 \equiv x^2 + y^2 - 4y = 0$ என்னும் இரு வட்டங்களும் ஒன்றையொன்று வெளிப்புறமாகத் தொடும் எனக் காட்டி இவற்றின் தொடுபள்ளியினாடாகச் செல்லும் பொதுத் தொடலியின் சமன்பாட்டை எழுதுக.

10. A, B, C என்பன முக்கோணி ஒன்றின் கோணங்கள் எனின் $\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C = 2 \sin A \sin B \cos C$ எனக் காட்டுக.

பகுதி B

11. (a) p, q ஆகியன மெய்யெண்களாக உள்ள இருபடிச் சமன்பாடு $x^2 + px + q = 0$ இன் மூலங்கள் α, β எனக் கொள்வோம். $a = \alpha + \beta^2, b = \beta + \alpha^2$ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாட்டை p, q இன் சார்பில் காண்க. α, β ஆகியன மெய்யானவையாக இல்லாதபோது $p = -1$ ஆக இருந்தால் - இருந்தால் மாத்திரம் a, b ஆகியன மெய்யெணவும் இச்சந்தரப்பத்தில் $a = b = 1 - q$ எனவும் காட்டுக.
- (b) p, q ஆகியன இரு பூச்சியமற்ற மெய்யெண்கள் எனவும் $f(x) = px^3 + 3x^2 - qx - 6$ எனவும் கொள்வோம். $(x+1), (x+2)$ என்பன $f(x)$ இன் காரணிகள் எனின் p, q இன் பெறுமானத்தைக் கண்டு மூன்றாம் காரணியையும் காண்க. $f(x)$ ஜி $2x^2 - x - 1$ இனால் வகுக்கும்போது மீதி யாது?
12. (a) covide-19 ஆய்விற்காக 5 பிரதான வைத்தியசாலைகள் பங்கேற்கின்றன. ஒவ்வொரு வைத்தியசாலையும் ஒரு ஆண் வைத்திய நிபுணர், ஒரு பெண் வைத்திய நிபுணர், ஒரு தொழில்நுட்ப உதவியாளர் ஆகியோரால் பிரதிநிதித்துவப்படுத்தப்படுகின்றது. இவர்களில் 5 உறுப்பினர்களைக் கொண்ட ஒரு குழுவைத் தெரிந்தெடுக்க வேண்டியுள்ளது. பின்வரும் ஒவ்வொரு சந்தரப்பங்களிலும் ஆக்கப்படத்தக்க வெவ்வேறு வழிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.
- (i) குழுவில் 2 ஆண் வைத்திய நிபுணர்கள் 2 பெண் வைத்திய நிபுணர்கள், 1 தொழில்நுட்ப உதவியாளர் இடம்பெற வேண்டும்.
 - (ii) 5 வைத்தியசாலைகளையும் பிரதிநிதித்துவப்படுத்தக்கூடியதாகவும் 2 ஆண் வைத்திய நிபுணர்கள், 2 பெண் வைத்திய நிபுணர்கள், 1 தொழில்நுட்ப உதவியாளர் இடம்பெற வேண்டும்.
 - (iii) குறித்த இரு வைத்தியசாலையின் ஆண் வைத்திய நிபுணர்கள் இருவரும் பங்குபற்றத்தக்கதாகவும் ஏனைய வைத்தியசாலைகளிலிருந்து 2 பெண் வைத்திய நிபுணர்களும் ஒரு தொழில்நுட்ப உதவியாளரும் இடம்பெறும் குழுக்கள்
 - (iv) தெரிவு செய்யப்பட்ட ஒரு குழுவானது தொற்று நீக்கும் செயன்முறைக்காகச் சுரங்கப் பாதையினாடு அனுப்ப வேண்டியுள்ளது. அனுப்பப்படத்தக்க விதங்களின் எண்ணிக்கை யாது?

(b) $V_r = Pr^2 + Qr + R$ எனக் கொள்வோம். இங்கு P, Q, R என்பன மெய்மாறிலிகள், எல்லா $r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கும் $r(r+1) = V_r - 3V_{r-1}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக P, Q, R என்பவற்றைக் காண்க.

$\frac{1.2}{3^1} + \frac{2.3}{3^2} + \frac{3.4}{3^3} + \frac{4.5}{3^4} + \dots$ என்னும் தொடரின் r ஆவது உறுப்பு U_r ஜ எழுதுக $U_r = f(r) - f(r-1)$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக $f(r)$ ஜக் காண்க. இதிலிருந்து, $\sum_{r=1}^n U_r = \frac{9}{4} - \frac{(2n^2+8n+9)}{4 \cdot 3^n}$ எனக் காட்டுக $\sum_{r=1}^n w_r = \left(\frac{9}{4} - \sum_{r=1}^n U_r\right) 4 \cdot 3^n$ எனின் $\sum_{r=1}^{\infty} w_r$ ஒருங்கு தொடரா? உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.

13. (a) $Z_1 + Z_2, Z_1Z_2$ ஆகிய ஒவ்வொன்றும் மறை மெய்யெண்களாக இருக்குமாறு Z_1, Z_2 என்பன இரு சிக்கல் எண்கள் எனின், Z_1, Z_2 மெய்யெண்கள் எனக் காட்டுக.

(b) $|Z_1| = |Z_2| = |Z_3|$ ஆகவும் $Z_1 + Z_2 + Z_3 = 0$ ஆகவும் இருக்குமாறு Z_1, Z_2, Z_3 பூச்சியமற்ற மூன்று சிக்கல் எண்கள் ஆகும். ஆகன் வரிப்படம் ஒன்றில் சமபக்க முக்கோணி ஒன்றின் உச்சிகளை இச்சிக்கல் எண்கள் வகை குறிக்கின்றன எனக் காட்டுக.

(c) $A = \begin{bmatrix} -6 & -9 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ எனின், $A^2 + A - 12I = \mathbf{0}$ எனக் காட்டுக. இதிலிருந்து, A^{-1} ஜக் காண்க.

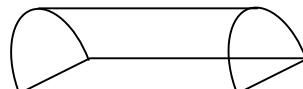
14. (a) $x \neq 2$ இற்கு $f(x) \equiv \frac{4(x^2-3x+1)}{(x-2)^3}$ ஆகும்.

$x \neq 2$ இற்கு $f'(x) \equiv -\frac{4(x+1)(x-3)}{(x-2)^4}$ எனத் தரப்பட்டுகின்றதெனக் காட்டுக.

திரும்பற் புள்ளிகளையும் அணுகுகோடுகளையும் காட்டி $y = f(x)$ இற்கான வரைபைப் பரும்படியாக வரைக.

$x \neq 2$ இற்கு $f''(x) \equiv \frac{8(x^2-x-8)}{(x-2)^5}$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது $y = f(x)$ இற்கான விபத்திப் புள்ளிகளின் x ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

(b) ஆரை r ஜயும் நீளம் h ஜயும் கனவளவு 100π ஜயும் உடைய திண்ம செவ்வட்ட உருளையொன்று உருவில் காணப்படுகின்றவாறு பாதியாக வெட்டப்பட்டுள்ளது. பாதி உருளையின் மொத்த மேற்பரப்பளவு S எனின்



$S = \pi r^2 + \frac{100\pi}{r} + \frac{200}{r}$ எனக் காட்டுக.

S இழிவாக இருப்பதற்கு உருளையின் நீளத்திற்கும் அரைவட்ட முகத்தின் விட்டத்திற்கும் இடையிலான விகிதம் $\pi : (\pi + 2)$ எனக் காட்டுக.

15 (a) பொருத்தமான பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்திய பின்னர் பகுதிப் பின்னங்களைக் கண்டு

$$\int \frac{x^5+x}{x^4+x^2-2} dx \text{ ஜக் காண்க.}$$

(b) $f(x)$ என்பது $[0, a]$ எனும் ஆயிடையினுள் தொகையிடத்தக்க சார்பு எனின் $\int_0^a f(a-x)dx = \int_0^a f(x)dx$ எனக் காட்டுக. இங்கு a ஒரு மெய்ம் மாறிலியாகும்.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin 2x}{\sin^6 x + \cos^6 x} dx = \frac{\pi}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 - 3 \sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx \quad \text{எனக் காட்டுக.}$$

$$\text{அத்துடன் } I = \frac{\sqrt{3}\pi^2}{9} \text{ எனவும் காட்டுக.}$$

(c) $J = \int \frac{\ln x^x}{(f(x))^2} dx$ எனவும் $f(x) = x^2 + 1$ எனவும் கொள்வோம். பகுதிகளாகத் தொகையிடுவதன் மூலம் ஆரம்பித்து $J = \ln \sqrt{x} - \frac{\ln \sqrt{x}}{f(x)} - \frac{1}{4} \ln f(x) + C$ எனக் காட்டுக. இங்கு C யானது எதேச்சை மாறிலியாகும்.

16. வெளிப்புள்ளி (x_0, y_0) இருந்து நேர்கோடு $ax + by + c = 0$ இங்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துத் தூரம் $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ எனக் காட்டுக.

t இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் $(1 - t^2)(x - h) + 2t(y - k) = r(1 + t^2)$ என்னும் கோடு $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ என்னும் வட்டத்தைத் தொடும் என நிறுவுக. $5(x^2 + y^2) - 6x + 8y - 35 = 0$ என்னும் வட்டத்தின் நான்கு அலகு நீளமுடைய இரு நாண்கள் $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 11 = 0$ என்னும் வட்டத்தைத் தொடும்படியாக வரையலாம் எனக் காட்டி அதன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

17. (a) $\cos(A + B)$ ஜ $\sin A, \cos A, \sin B, \cos B$ ஆகியவற்றின் சார்பில் எழுதி $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$ ஜ உய்த்தறிக.

$\cos 2\theta - \cos 4\theta = 2(\cos^2 \theta - \cos^2 2\theta)$ எனக் காட்டுக. இதிலிருந்து, θ இங்கு தகுந்த பெறுமானத்தை இடுவதன் மூலம் $\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}$ எனக் காட்டி $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ என்பதை உய்த்தறிக.

(b) வழமையான குறியீடுகளில் முக்கோணிக்கான கோசைன் நெறியைக் கூறுக. முக்கோணி ABC இங்கு வெளியே புள்ளி D காணப்படுகின்றது. ABD சமபக்க முக்கோணி எனின் $CD^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + 2\sqrt{3}\Delta$ எனக் காட்டுக. (இங்கு Δ என்பது முக்கோணி ABC இன் பரப்பளவு ஆகும்.)

(c) சமன்பாடு $\sin^{-1} \left(\frac{x}{x-1} \right) + 2 \tan^{-1} \left(\frac{1}{x+1} \right) = \frac{\pi}{2}$ ஜத் தீர்க்க.