



யாழ்ப்பாணம் இந்துக் கல்லூரி

இடர் விடுமுறைக்கால சுயகற்றலுக்கான செயலட்டை - 2020

தரம் - 12 (2021) | இணைந்த கணிதம்

பெயர் / சுட்டெண் :

திரு.ப.விமலநாதன் B.Sc & திருமதி.ஸ்ரீஜெயபதிதரன் B.Sc

இணைந்த கணிதம் - 1

திரிகோண கணிதம்

01)

1. முக்கோணியின் சைன் விதியையும், கோசைன் விதியையும் எடுத்துரைக்க.

a. $a \sin \frac{(B-C)}{2} = (b-c) \cos \frac{A}{2}$ எனவும்

b. $(b-c) \cot \frac{A}{2} = (b+c) \tan \frac{(B-C)}{2}$ எனவும் காட்டுக. இவற்றிலிருந்து

$(b-c) \cot \frac{A}{2} = (b+c) \tan \frac{(B-C)}{2}$ என்பதை உய்த்தறிக.

2. $\cos Q + \sin Q = 1$ எனும் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளைக் காண்க.

3. $Q = 18^\circ$ எனின் $\sin 2Q = \cos 3Q$ எனக் காட்டுக. இதிலிருந்து $\sin 18^\circ$ என்பது $4x^2 + 2x - 1 = 0$ இன் ஒரு தீர்வு எனக்காட்டி $\sin 18^\circ$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

02)

1. வழமையான குறியீடுகளுடன் யாதாயினும் ஒரு முக்கோணி ABC யில் கோசைன் விதியைக் கூறி நிறுவுக?

a. $\cos B = \frac{b^2}{2ac}$ எனவும்

b. $\frac{\sin 3B}{\sin B} = \left(\frac{a^2 - c^2}{2ac} \right)^2$ எனவும் காட்டுக?

2. $\tan^{-1} \left(\frac{5}{12} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{7}{17} \right) = \frac{\pi}{4}$ எனக் காட்டுக.

03)

(a) யாதாயினும் ஒரு முக்கோணி ABC ற்கு வழக்கமான குறிப்பீட்டில் கோசைன், சைன் நெறியை எடுத்துரைக்க. அதிலிருந்து $a = b \cos C + c \cos B$ ஐ உய்த்தறிக.

$(b+c) \cos A + (c+a) \cos B + (a+b) \cos C = a+b+c$ எனவும் காட்டுக.

(b) $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right), \beta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ எனத்தரப்படும்போது $\cos(\alpha - \beta) = \frac{63}{65}$ எனக்காட்டி இதிலிருந்து $\sin(\alpha - \beta)$ இன் பெறுமானத்தைப் பெறுக.

(c) $\tan 3x$ ஐ $\tan x$ இன் சார்பில் எடுத்துரைத்து, சார்பு $f(x) = \tan 3x \cdot \cot x$ இன் வீச்சு $\left[\frac{1}{3}, 3\right)$

எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $\tan 3x - \tan x = 0$ ஐத் தீர்க்க.

04)

a) $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ இற்கு $f(x) = \frac{2(1 + \tan x)}{1 + \tan^2 x}$ எனக் கொள்வோம். $f(x)$ ஐ வடிவம்

$A \cos(2x - \theta) + C$ இல் எடுத்துரைக்க. இங்கு $A(>0), B, \theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ துணியப்பட வேண்டிய மாறிலிகள்.

இதிலிருந்து $f(x) = 1$ ஐத் தீர்க்க.

$f(x)$ இற்காக தரப்பட்டுள்ள முதற்கோவையைப் பயன்படுத்தி $f(x) = 1$ ஆனது $\tan^2 x - 2 \tan x - 1 = 0$ என எழுதப்படலாம் எனக் காட்டுக.

$\tan \frac{3\pi}{8} = 1 + \sqrt{2}$ ஐ உய்த்தறிக.

b) தீர்க்க: $\cos x + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 0$

வகையீடு

1. பின்வரும் சார்புகளை x குறித்து வகையிடுக.

(i) $e^{\sin^{-1} 4x}$

(ii) $x e^{\tan^{-1} x}$

(iii) $(x^2 + 1) \sin^{-1} 2x$

(iv) $\sin^{-1}(\sin x)$

2. $x = \frac{2-3t}{1+t}, y = \frac{3+2t}{1+t}$ எனின் $\frac{dy}{dx}$ ஐக் காண்க.

3. $y = \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{1 - \cos x}$ எனின் $\frac{dy}{dx}$ ஐக் காண்க.

4. $x^2 + y^2 + \sin(xy) = 0$ எனின் $\frac{dy}{dx}$ ஐக் காண்க.

5. $y = \frac{(x^2+1)^2(x+7)^3}{2x-3}$ எனின் $\frac{dy}{dx}$ ஐக் காண்க.

6. $y = e^{-x} \sin(x\sqrt{3})$ எனின் $\frac{dy}{dx} = -2e^{-x} \sin\left(x\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$ எனக் காட்டுக.

7. $x = 2t^3 + 1$, $y = 4t^4 - 1$ எனின் $\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + 2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 0$ எனக் காட்டுக.

8. $y = \tan x + \sec x$ எனின் $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\cos x}{(1-\sin x)^2}$ எனக் காட்டுக.

9. $y = \ln \sqrt{\tan x}$ எனின் $\frac{dy}{dx} = \operatorname{cosec} 2x$ எனக் காட்டுக. $x = \frac{\pi}{4}$ இல் $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

10. $0 < b < a$ எனக் கொள்வோம். $\frac{d}{dx} \left\{ \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan \frac{x}{2} \right) \right\} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2(a+b \cos x)}$ எனக் காட்டுக.

11. $y = \ln \sqrt{x + \sqrt{x^2 + 4}}$ எனின் $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

12. $y = \sec(\tan^{-1} x)$ எனின், $x = 1$ இல் $\frac{dy}{dx}$ ஐக் காண்க.

இணைந்த கணிதம் - 11

நேர்கோட்டியக்கம்

1. A என்பது தரையிலுள்ள ஒரு புள்ளியாகவும் B என்பது A ற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே hm உயரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியாகவும் உள்ளது. A இல் இருந்து நிலைக்குத்தாக மேல் நோக்கி ums^{-1} உடன் ஒரு துணிக்கை வீசப்படும் அதே கணத்தில் B இலே ஓய்விலிருந்து வேறோர் துணிக்கை விழவிடப்படுகின்றது. இரு துணிக்கைகளும் ஒரே நேரத்தில் தரையை வந்தடைந்தன எனின் $u^2 = \frac{1}{2}gh$ எனக் காட்டுக.
2. நேர்கோடொன்றில் இயங்கும் துணிக்கையொன்று ஆரம்பத்தில் அக்கோட்டிலுள்ள குறித்த புள்ளியிலிருந்து a தூரத்தில் இருக்க காணப்பட்டது. n செக்கன் ஆயிடையின் பின் b தூரத்திலும், $2n$ செக்கனின் பின் c தூரத்திலும், $3n$ செக்கனின் பின் d தூரத்திலும் இருக்கக் காணப்பட்டது. துணிக்கையின் ஆர்முடுகல் சீரானதாயின் $d - a = 3(c - b)$ எனக் காட்டுக.
3. ஒரு கல் ums^{-1} வேகத்துடன் நிலைக்குத்தாக மேலோக்கி வீசப்படுகின்றது. T செக்கனின் பின் இன்னொரு துணிக்கை அதே புள்ளியிலிருந்து அதே வேகத்துடன் நிலைக்குத்தாக மேலோக்கி வீசப்படுகின்றது. ஆவை $\frac{4u^2 - g^2T^2}{8g}$ உயரத்தில் சந்திக்கும் எனக் காட்டுக.
4. ஒரு துணிக்கை u வேகத்துடன் நிலைக்குத்தாக மேலோக்கி எறியப்படுகின்றது. $\frac{u}{g}$ நேரத்தின் பின் இன்னொரு துணிக்கை அதே புள்ளியிலிருந்து v வேகத்துடன் நிலைக்குத்தாக மேலோக்கி எறியப்படுகின்றது. முதலாந் துணிக்கை அடைந்த அதியுயர் உயரத்தின் அரைப்பங்கு உயரத்திற்கு மீளும் போது இரண்டாம் துணிக்கையை சந்திக்கும் எனின் $v = \frac{u}{\sqrt{2}}$ எனக்காட்டுக.
5. கிடைத் தரையில் இருந்து h உயரத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளியில் இருந்து புவியீர்ப்பின் கீழ் சுயாதீனமாக ஒரு துணிக்கை P விழவிடப்படும் கணத்தில் அதற்கு நேர் கீழே தரையில் உள்ள புள்ளியிலிருந்து துணிக்கை Q ஆனது u வேகத்துடன் புவியீர்ப்பின் கீழ் நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கி எறியப்படுகின்றது. இரு துணிக்கைகளும் தரையில் இருந்து $\frac{2h}{3}$ உயரத்தில் சந்திப்பின் $h = \frac{2u^2}{3g}$ எனக் காட்டுக.

எறியம்

1) துணிக்கை A ஆனது O விலிருந்து கிடையுடன் α கோணத்தில் vms^{-1} வேகம் உடன் எறியப்படுகிறது. துணிக்கையின் O இன் மட்டத்திற்கு மேல் அதியுயர் உயரம் H ஐ அடைகின்றது. O இனுடான கிடைவீச்சு R ஆகும்.

i. $H = \frac{v^2}{2g} \sin^2 \alpha$

ii. $R = \frac{v^2}{2g} \sin 2\alpha$ எனக் காட்டுக.

iii. $\alpha = 60^\circ$ எனின் $H : R = \sqrt{3} : 4$ எனக் காட்டுக.

2) ஒரு துணிக்கை u வேகத்துடன் α ஏற்றக்கோணத்தில் நிலைக்குத்துத் தளத்தில் வீசப்படுகின்றது. துணிக்கையின் கிடைவீச்சானது அது அடைந்த அதியுயரத்தின் இரு மடங்கு எனின் கிடைவீச்சு $\frac{4u^2}{5g}$ எனக் காட்டுக.

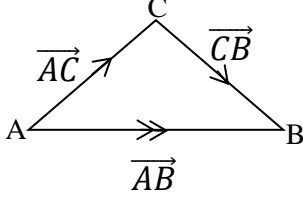
3) ஒரு துணிக்கையானது கிடையுடன் α ஏற்றக் கோணத்தில் u வேகத்துடன் எறியப்படுகிறது. இத்துணிக்கையானது யாதாயினும் ஒரு நேரம் t இல் புள்ளி $P(x, y)$ இனூடு சென்றால் அதன் கடவையின் சமன்பாடு $y = x \tan \alpha - \frac{gx^2(1 + \tan^2 \alpha)}{2u^2}$ எனக் காட்டுக.

கிடைத்தரையிலுள்ள புள்ளி O இலிருந்து 60° ஏற்றக்கோணத்தில் வீசப்பட்ட பந்து O இலிருந்து கிடையாக a தூரத்திலுள்ள $\frac{a}{\sqrt{3}}$ உயரமான நிலைக்குத்துக் கம்பம் ஒன்றின் உச்சியை அடிக்கின்றது. பந்தின் எறியல் வேகத்தைக் காண்க. அடைந்த அதியுயரத்திற்கும் கம்பத்தின் உயரத்திற்குமிடையிலான விகிதம் $9:8$ எனக் காட்டுக.

கம்பம் அவ்விடத்தில் இல்லாதிருப்பின் O இலிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் நிலத்தை அடிக்கும் எனக் காண்க.

காவிகள்

- ❖ காவிகளின் முக்கோணிவிதிக் கூட்டல்



$$\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$$

- ❖ $\vec{AB} = \underline{b} - \underline{a}$

- ❖ $\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| |\underline{b}| \cos \theta$; இங்கு $\theta (0 \leq \theta \leq \pi)$ என்பது \underline{a} , \underline{b} ஆகிய காவிகளுக்கிடையிலான கோணமாகும்.

- ❖ $\underline{a} \perp \underline{b} \Leftrightarrow \underline{a} \cdot \underline{b} = 0$.

- ❖ $\underline{a} \parallel \underline{b} \Leftrightarrow \underline{a} = \lambda \underline{b}$.

- ❖ $|\underline{a}|^2 = \underline{a} \cdot \underline{a}$

- ❖ $\underline{a}, \underline{b} \neq \underline{0}$, $\underline{a} \parallel \underline{b}$ ஆக உள்ளன என்க.

$$\lambda_1 \underline{a} + \mu_1 \underline{b} = \lambda_2 \underline{a} + \mu_2 \underline{b} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2, \mu_1 = \mu_2$$

(குணகங்கள் சமப்படுத்தப்பட்டுள்ளது)

- ❖ $|\underline{x}_i + \underline{y}_j| = \sqrt{x^2 + y^2}$

- ❖ $(x_1 \underline{i} + y_1 \underline{j}) \cdot (x_2 \underline{i} + y_2 \underline{j}) = x_1 x_2 + y_1 y_2$

1. $\underline{a} = 3\underline{i} + 4\underline{j}$ எனவும் $\underline{b} = -2\underline{i} + 2\underline{j}$ எனவும் கொள்வோம்.

(i) $|\underline{a}|$, $|\underline{b}|$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

(ii) $\underline{a} \cdot \underline{b} = 2$ எனக் காட்டுக.

மேலே உள்ள முடிவுகளைப் பயன்படுத்தி \underline{a} , \underline{b} ஆகிய காவிகளுக்கிடையிலான கோணம் $\cos^{-1}\left(\frac{1}{5\sqrt{2}}\right)$ எனக் காட்டுக.

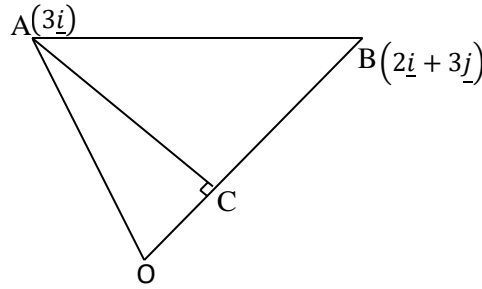
2. $\underline{a} = 2\underline{i} + k\underline{j}$ எனவும் $\underline{b} = -4\underline{i} + 3\underline{j}$ எனவும் கொள்வோம்.

(i) $\underline{a} \cdot \underline{b} = 4$ எனின் $k = 4$ எனக் காட்டுக.

(ii) $k = 4$ எனின், $|\underline{a}|$, $|\underline{b}|$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

(iii) \underline{a} , \underline{b} ஆகிய காவிகளுக்கிடையிலான கோணம் $\cos^{-1}\left(\frac{2}{5\sqrt{5}}\right)$ எனக் காட்டுக.

3.



வழக்கமான குறிப்பீட்டில், $3\underline{i}$, $2\underline{i} + 3\underline{j}$ ஆகியன ஒரு நிலைத்த உற்பத்தி O பற்றி முறையே A, B என்னும் புள்ளிகளின் தானக் காவிகளெனக் கொள்வோம். C ஆனது நேர்கோடு OB மீது, $O\hat{C}A = \frac{\pi}{2}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக, உள்ள புள்ளி எனவும். கொள்வோம். $\overrightarrow{OC} = \lambda \overrightarrow{OB}$ எனின் \overrightarrow{AC} ஐ \underline{i} , \underline{j} , λ இன் சார்பில் கண்டு, $O\hat{C}A = \frac{\pi}{2}$ ஐப் பயன்படுத்தி λ ஐக் காண்க. இதிலிருந்து, \overrightarrow{OC} ஐ \underline{i} , \underline{j} ஆகியவற்றில் காண்க.

4. $\underline{u} = 2\underline{i} + \underline{j}$ எனவும் $\underline{v} = -\underline{i} + k\underline{j}$ எனவும் கொள்வோம்; இங்கு k ஒரு மெய்யெண்.

$\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ எனின் k இன் சாத்தியமான பெறுமானங்களைக் காண்க.

5. $\underline{a} = x\underline{i} + y\underline{j}$ எனவும் $\underline{b} = 2\underline{i} + \underline{j}$ எனவும் கொள்வோம்; இங்கு x, y நேரானவை.

$|\underline{a}| = \sqrt{10}$ ஆகும். x, y ஆகியவற்றிற்கிடையே ஒரு தொடர்பைப் பெறுக. $\underline{a} \cdot \underline{b}$ ஐ x, y சார்பில் எழுதி \underline{a} , \underline{b} இற்கிடையிலான கோணம் 45° என மேலும் தரப்படின் x, y ஐக் காண்க.

6. $\underline{a}, \underline{b}$ ஆகிய பூச்சியமல்லாத இரு காவிகளின் எண்ணிப்பெருக்கம் $\underline{a} \cdot \underline{b}$ என்பதை வரையறுக்க.

பின்வரும் ஒவ்வொரு வகையிலும் $\underline{a}, \underline{b}$ ஆகியவற்றிற்கு இடையிலான கோணத்தைக் காண்க.

(i) $\underline{a} \cdot (\underline{a} + 2\underline{b}) = 0$ உம் $|\underline{a}| = |\underline{b}|$ உம்

(ii) $|\underline{a} + \underline{b}| = |\underline{a} - \underline{b}|$

(iii) $\underline{a} \cdot (\underline{a} - \underline{b}) = 0, \quad \sqrt{2}|\underline{a}| = |\underline{b}|$

7. உற்பத்தி \mathbf{O} குறித்து A, B இன் தானக்காவிகள் முறையே $2\underline{i} - \underline{j}, \quad \underline{i} + \underline{j}$ ஆகும்.

(i) $3\underline{i} + m\underline{j}$ ஐ தானக்காவியாகக் கொண்ட புள்ளி C ஆனது AB மீது கிடக்குமெனின் m இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(ii) D என்ற புள்ளியின் தானக்காவி $\underline{d} = 3\underline{i} + n\underline{j}$ ஆகும். AB ஆனது AD இற்கு செங்குத்தாக இருக்குமாறு n இன் பெறுமானத்தைக் காண்க. முக்கோணி ABD இன் பரப்பளவையும் காண்க.

8. $\overrightarrow{OP} = 3\underline{i} - 4\underline{j}$ எனவும் $\overrightarrow{OQ} = 5(4\underline{i} + 3\underline{j})$ எனவும் கொள்வோம்.

(i) \overrightarrow{QP} ஐ $\underline{i}, \underline{j}$ இன் சார்பில் காண்க.

(ii) $\cos \angle OQP = \frac{5}{\sqrt{26}}$ எனக் காட்டுக.

9. பின்வரும் காவிகள் நேர் x அச்சுடன் அமைக்கும் கோணத்தையும் நேர் y அச்சுடன் அமைக்கும் கோணத்தையும் காண்க.

(i) $2\underline{i} + \underline{j}$

(ii) $3\underline{i} - 4\underline{j}$

10. முக்கோணி OAB இல் AB யின் நடுப்புள்ளி C உம் OC இன் நடுப்புள்ளி E உம் ஆகும். $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{3} \overrightarrow{OB}$ ஆகுமாறு OB யிலுள்ள புள்ளி D ஆகும். $\overrightarrow{OA} = \underline{a}, \overrightarrow{OB} = \underline{b}$

எனக்கொண்டு $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}$ ஆகியவற்றை $\underline{a}, \underline{b}$ இன் சார்பில் காண்க. இதிலிருந்து, A, E, D ஆகிய புள்ளிகள் ஒரே நேர்கோட்டில் உள்ளன எனக் காட்டி $AE : ED$ ஐயும் காண்க.

11. $\underline{a}, \underline{b}$ என்னும் இரு காவிகளின் குற்றுப்பெருக்கம் $\underline{a} \cdot \underline{b}$ யை வரையறுக்க.

a, b, c, d என்னும் எவையேனும் நான்கு காவிக்கு

$(a + b).(c + d) = a.c + b.c + a.d + b.d$ எனக்கொண்டு

$|a + b|^2 = |a|^2 + 2(a.b) + |b|^2$ எனக்காட்டுக.

$|a - b|^2$ இற்கு ஓர் இயல்பொத்த கோவையை எழுதுக.

$|a + b|^2 = |a - b|^2$ எனின் $a.b = 0$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, ஓர் இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் சமமெனின், அது ஒரு செவ்வகமெனக் காட்டுக.